E.N.S. Saint-Cloud et Fontenay 1985

Option Mathématiques Math III

Durée : 3 heures

---

## Notations

$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers strictement positifs.

On munit l'espace $\mathbb{R}^d$, $(d \in \mathbb{N}^*)$, d'un produit scalaire $< , >$, défini par $< x, y > = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ si $(x_1, \ldots, x_d)$, $(y_1, \ldots, y_d)$ sont les coordonnées de $x$ et $y$ dans la base canonique.

Par convention, si $f$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $y$ un élément de $\mathbb{R}^d$ de coordonnées $(y_1, \ldots, y_d)$, $f(y)$ désigne l'élément de $\mathbb{R}^d$ de coordonnées $(f(y_1), \ldots, f(y_d))$.

$S_d$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ défini par :

$$S_d = \{ p = (p_1, p_2, \ldots, p_d) \text{ tels que } 0 < p_i \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, d \text{ et } \sum_{i=1}^{d} p_i = 1 \}.$$

## Question préliminaire

Soit $(p, y)$ un élément de $S_d \times \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N}^*)$.

1° Montrer que si $\varphi$ est une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$\varphi(< p, y >) \leqslant < p, \varphi(y) >$$

2° En déduire que pour tout $\alpha \geqslant 1$

$$|< p, y >| \leqslant (< p, |y|^\alpha >)^{1/\alpha}$$

## PREMIÈRE PARTIE

1° Soit $(p, y)$ un élément de $S_d \times \mathbb{R}^d$ et $t$ un nombre réel.

On pose $M(t) = < p, e^{ty} > = \sum_{i=1}^{d} p_i e^{ty_i}$.

Montrer que la fonction $t \longmapsto M(t)$ est convexe, indéfiniment dérivable et admet un développement, en série entière de la forme :

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} < p, y^n >$$

2° On désigne par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des fonctions de ce type, soit

$$\mathfrak{M} = \{ t \longmapsto M(t) \mid \exists (d, p, y) \in \mathbb{N}^* \times S_d \times \mathbb{R}^d \text{ tels que } (\forall t \ M(t) = < p, e^{ty} >) \}$$

*a.* Montrer que les fonctions $d_a(t) = e^{at}$ $(a \in \mathbb{R})$ et $m(t) = r e^t + s$ $(r, s \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ et $r + s = 1)$ appartiennent à $\mathfrak{M}$.

*b.* Montrer que $\mathfrak{M}$ est stable par multiplication.

*c.* Décrire un couple $(p, y)$ de $S_{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $(m(t))^n = < p, e^{ty} >$.

*d.* Soit $t_0$ un nombre réel fixé.

Montrer que si M appartient à $\mathfrak{M}$, la fonction

$$t \longmapsto \frac{M(t + t_0)}{M(t_0)} \text{ appartient à } \mathfrak{M}.$$

3° On désigne par $T^d$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, défini par :

$$T^d = \{ y = (y_1, y_2, \ldots, y_d) \ ; \ y_1 < y_2 < \ldots < y_d \}$$

et par $\Sigma = \bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} S_d \times T^d$

Montrer que l'application de $\Sigma$ dans $\mathfrak{M}$, qui à $(p, y) \in \Sigma$ associe $t \longmapsto < p, e^{ty} >$ est injective.

4° Soit $(p, y)$ un élément de $S_d \times T^d$.

On pose $C(t) = \operatorname{Log} M(t) = \operatorname{Log} < p, e^{ty} >$ pour tout $t$ de $\mathbb{R}$.

*a.* Montrer que la fonction C est indéfiniment dérivable et convexe.

*b.* Donner une condition nécessaire et suffisante pour que C soit linéaire.

*c.* On suppose $d \geqslant 2$.

Montrer que la fonction dérivée de C, notée C', est strictement croissante.

On désigne par $\tau$ la fonction inverse de C'.

Préciser son domaine de définition, ainsi que les valeurs pour lesquelles elle s'annule.

5° On suppose $d \geqslant 2$. Soit $(p, y)$ un élément de $S_d \times T^d$ et $A = ]y_1, y_d[$.
Pour tout $a$ de A, on définit $H(a) = \sup \{ au - C(u) ; u \in \mathbb{R} \}$.

*a.* Montrer que $H(a)$ est fini pour tout $a$ de A et que la fonction de A dans $\mathbb{R}$, $a \longmapsto H(a)$ est convexe et positive ou nulle.

*b.* Montrer que $H(a) = a\,\tau(a) - C(\tau(a))$.

*c.* En déduire que $H(a)$ est strictement positif si $a \neq < p, y >$.

*c.* Montrer que si $< p, y > < a$, $H(a) = \sup \{ au - C(u) ; u > 0 \}$.

*d.* Exemple : soit $p = (s, t)$ et $y = (0, 1)$ $(r, s \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ et $r + s = 1)$.
On appelle K et $\gamma$ les fonctions correspondant à H et $\tau$, définies sur $]0, 1[$.
Calculer $K(a)$ et $\gamma(a)$ pour $q \in ]r, s[$.
*(Ces fonctions seront utilisées dans la deuxième partie.)*

6° Soit $(p, y)$ un élément de $S_d \times T^d$, $(d \geqslant 2)$, et C et H les fonctions associées en 4° et 5°.

*a.* En utilisant un développement limité de C' au voisinage de zéro, donner un équivalent de $\tau$ au voisinage de $< p, y >$.

*b.* En déduire que $H(< p, y > + \varepsilon)$ est équivalent à $\dfrac{\varepsilon^2}{2\,C''(0)}$ si $\varepsilon$ tend vers zéro.

## DEUXIÈME PARTIE

Dans toute cette partie, $r$ et $s$ sont des nombres réels strictement positifs tels que $r + s = 1$.

On rappelle que si $j$ et $n$ sont des entiers tels que $0 \leqslant j \leqslant n$

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$$

On considère la suite de $(n+1)$ nombres, définie par :

$$b_j^{(n)} = \binom{n}{j} r^j s^{n-j} \text{ où } 0 \leqslant j \leqslant n \quad (j \in \mathbb{N} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*).$$

Pour tout $a \in ]0, 1[$ on pose :

$$I_a^n = \sum_{na < j \leqslant n} b_j^{(n)} \quad \text{et} \quad J_a^n = \sum_{0 \leqslant j < na} b_j^{(n)}$$

1° Soient $a \in ]r, 1[$ et $t \geqslant 0$

*a.* Montrer que :

$$I_a^n \leqslant \sum_{na < j \leqslant n} e^{t(j-na)} \leqslant e^{-tna}\,(m(t))^n$$

où la fonction $m$ est étudiée en 1.2°. $a$ et $r$.

*b.* En utilisant la question 1.5° et la fonction K définie en 1.5° *d*, montrer que $I_a^n \leqslant e^{-nK(a)}$.

*c.* On suppose maintenant $a \in ]0, r[$.
Montrer que $J_a^n \leqslant e^{-nK(a)}$.

*d.* En déduire que : si $a < r$, $I_a^n$ tend vers 1 si $n$ tend vers $+\infty$.
si $a > r$, $J_a^n$ tend vers 1 si $n$ tend vers $+\infty$.

2° On pose $j_n = E(nb)$ si $b = 1 - a$ et $k_n = n - j_n$.
(E désigne le symbole partie entière.)

*a.* Montrer qu'il existe une constante $L_1$ telle que :

$$\left(\frac{ns}{j_n}\right)^{j_n} \geqslant L_1 \left(\frac{s}{b}\right)^{nb}$$

*b.* Établir une inégalité du même type pour $\left(\dfrac{nr}{k_n}\right)^{k_n}$ valable pour $n$ assez grand.

*c.* Montrer que $e^{-K(a)} = \left(\dfrac{r}{a}\right)^a \left(\dfrac{s}{b}\right)^b$ si $a \in ]0, 1[$.

3° *a.* En utilisant la formule de STIRLING ($n! \sim \sqrt{2\pi}\,e^{-n}\,n^{n+1/2}$ si $n$ tend vers $+\infty$) montrer que $b_{k_n}^{(n)}$ est minoré par $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{nr}{k_n}\right)^{k_n}\left(\dfrac{ns}{j_n}\right)^{j_n}$ si $n$ est grand.

*b.* En déduire que si $n$ est grand,

$$I_a^n \geqslant b_{k_n}^{(n)} \geqslant \frac{L_2}{n}\,e^{-nK(a)}$$

où $L_2$ est une constante.

*c.* Montrer que pour $a \in ]r, 1[$,

$$-\frac{1}{n}\,\text{Log}\,I_a^n \text{ converge vers } K(a) \text{ si } n \text{ tend vers } +\infty.$$

4° Étudier de même la limite, si $n$ tend vers $+\infty$, de

$$-\frac{1}{n}\,\text{Log}\,J_a^n \quad \text{pour } a \text{ différent de } r.$$